1. 座標平面において，C_0 は点 (0, 1) を中心とする半径 1 の円，C_1 は点 (2, 1) を中心とする半径 1 の円である。$n = 2, 3, \cdots$ に対し，円 C_n を次の 2 つの条件を満たすように定める。

(i) C_n は，C_0 と C_{n-1} に外接し，かつ x 軸に接する。

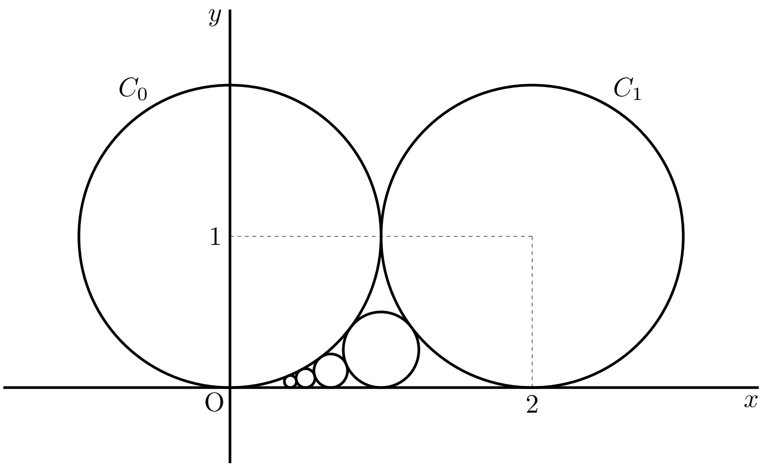
(ii) C_n の半径は，C_{n-1} の半径より小さい。

円 C_n の中心を P_n とするとき，次の設問に答えよ。

(1) P_3 の座標を求めよ。

(2) P_n の座標を求めよ。

【解答】



〔早稲田大学 （商） (2140200742)〕

2. 半径 1 の円 O と半径 1 の円 O_1 が外接しており，さらに，2 つの円はともに直線 l に接している。いま図 1 のように，円 O_2 は，円 O と円 O_1 の両方に外接し，かつ，直線 l にも接している。以下，$n = 2, 3, \cdots$ に対して，円 O_{n+1} を円 O と円 O_n の両方に外接し，かつ，直線 l にも接しているように作っていくとする。円 O_n の半径を r_n で表すとき，以下の問いに答えなさい。

図 1

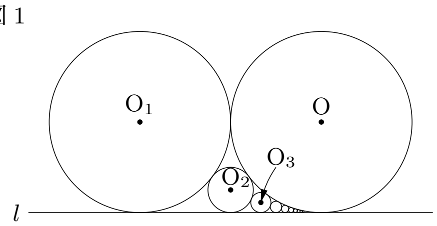
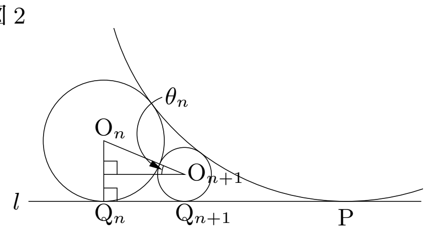


図 2



(1) 円 O, O_n および O_{n+1} と直線 l との接点を，それぞれ，P, Q_n および Q_{n+1} とする（図 2 を参照）。
このとき，$\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}$, $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}$ および $\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}$ を，それぞれ，r_n, r_{n+1} を用いて表しなさい。

(2) r_n を n の式で表しなさい。

(3) 2 点 O_n と O_{n+1} を通る直線と直線 l とのなす角を θ_n で表す（図 2 を参照）。ただし，$0 \leqq \theta_n < \dfrac{\pi}{2}$ とする。このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos\theta_n}{\cos\theta_n}$ を求めなさい。

〔日本大学（医） (2116200802)〕

3. 平面上の直線 ℓ に同じ側で接する 2 つの円 C_1, C_2 があり，C_1 と C_2 も互いに外接している。ℓ, C_1, C_2 で囲まれた領域内に，これら 3 つと互いに接する円 C_3 を作る。同様に ℓ, C_n, C_{n+1} $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で囲まれた領域内にあり，これら 3 つと互いに接する円を C_{n+2} とする。円 C_n の半径を r_n とし，$x_n = \dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，$r_1 = 16$, $r_2 = 9$ とする。

(1) ℓ が C_1, C_2, C_3 と接する点を，それぞれ A_1, A_2, A_3 とおく。線分 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$, $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$, $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ の長さおよび r_3 の値を求めよ。

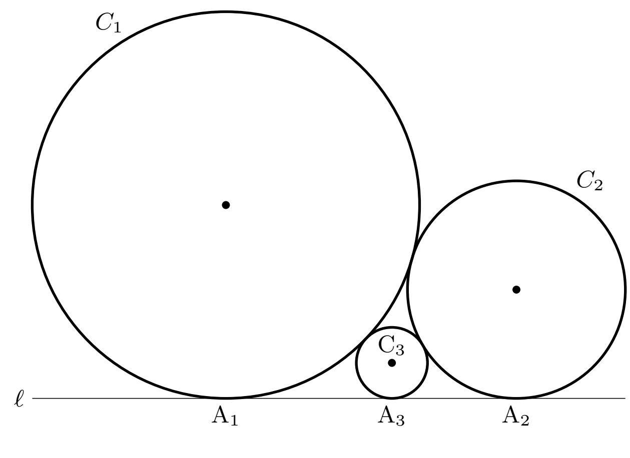
(2) ある定数 a, b に対して $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ となることを示せ。a, b の値も求めよ。

(3) (2) で求めた a, b に対して，2 次方程式 $t^2 = at + b$ の解を α, β $(\alpha > \beta)$ とする。$x_1 = c\alpha^2 + d\beta^2$ を満たす有理数 c, d の値を求めよ。ただし，$\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしで用いてよい。

(4) (3) の c, d, α, β に対して，

$$x_n = c\alpha^{n+1} + d\beta^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

となることを示し，数列 $\{r_n\}$ の一般項を α, β を用いて表せ。



〔筑波大学 (0016201404)〕

4. xy 平面の $y \geqq 0$ の部分にあり，x 軸に接する円の列 $C_1, C_2, C_3, \cdots$ を次のように定める。

- C_1 と C_2 は半径 1 の円で，互いに外接する。
- 正の整数 n に対し，C_{n+2} は C_n と C_{n+1} に外接し，C_n と C_{n+1} の弧および x 軸で囲まれる部分にある。

円 C_n の半径を r_n とする。

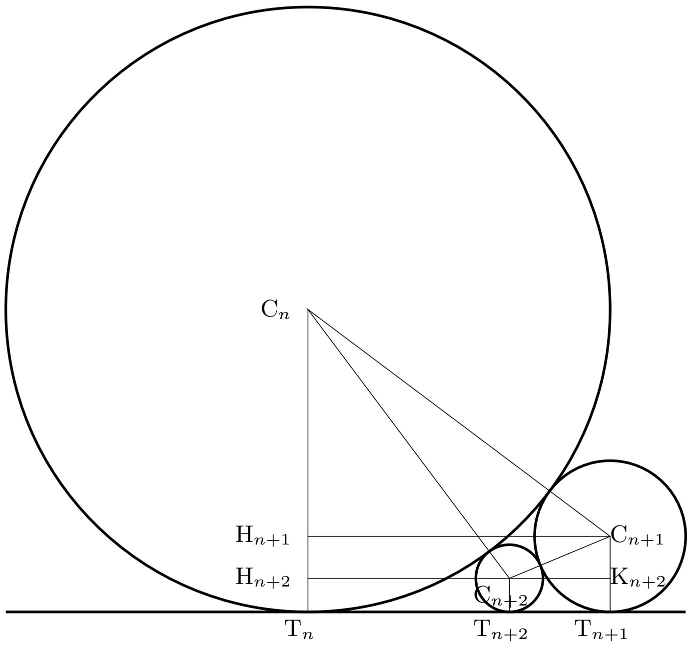
(1) 等式 $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_n}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ を示せ。

(2) すべての正の整数 n に対して $\dfrac{1}{\sqrt{r_n}} = s\alpha^n + t\beta^n$ が成り立つように，n によらない定数 α, β, s, t の値を一組与えよ。

(3) $n \to \infty$ のとき数列 $\left\{\dfrac{r_n}{k^n}\right\}$ が正の値に収束するように実数 k の値を定め，そのときの極限値を求めよ。

【解答】

(1)【証明】円 C_n の中心を C_n とする。円 C_n と x 軸との接点を T_n とし，点 C_{n+1}, C_{n+2} から直線 $\mathrm{C}_n\mathrm{T}_n$ に下ろした垂線の足をそれぞれ H_n, H_{n+2} とする。また，点 C_{n+2} から直線 $\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{T}_{n+1}$ に下ろした垂線の足を K_{n+2} とする。



直角三角形 $\mathrm{C}_n\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1}$ において

$$\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1}^2 + (r_n - r_{n+1})^2 = (r_n + r_{n+1})^2$$
$$\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1} = 2\sqrt{r_n r_{n+1}}$$

同様に，直角三角形 $\mathrm{C}_n\mathrm{C}_{n+2}\mathrm{H}_{n+2}$ において

$$\mathrm{C}_{n+2}\mathrm{H}_{n+2} = 2\sqrt{r_n r_{n+2}}$$

直角三角形 $\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{C}_{n+2}\mathrm{K}_{n+2}$ において

$$\mathrm{C}_{n+2}\mathrm{K}_{n+2} = 2\sqrt{r_{n+1} r_{n+2}}$$

$\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1} = \mathrm{C}_{n+2}\mathrm{H}_{n+2} + \mathrm{C}_{n+2}\mathrm{K}_{n+2}$ であるから

$$2\sqrt{r_n r_{n+1}} = 2\sqrt{r_n r_{n+2}} + 2\sqrt{r_{n+1} r_{n+2}}$$

両辺を $2\sqrt{r_n r_{n+1} r_{n+2}}$ で割って

$$\frac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \frac{1}{\sqrt{r_n}} + \frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}} \qquad \square$$

(2) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくと，(1) の結果から

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

二次方程式 $x^2 = 1 + x$ の 2 つの実数解を (α, β) $(\alpha < \beta)$ とおくと，解と係数の関係の関係より

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

したがって①を変形して

$$a_{n+2} = -\alpha\beta a_n + (\alpha + \beta)a_{n+1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$
$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

数列 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ は公比 β の等比数列で，その初項は

$$a_2 - \alpha a_1 = \frac{1}{\sqrt{r_2}} - \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{r_1}} = 1 - \alpha = \beta \quad (\because ②)$$

ゆえに

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

③は，α, β について対称であるから

$$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

も得られる。④ − ⑤ より

$$(\beta - \alpha)a_n = \beta^n - \alpha^n$$

α, β は $x^2 = 1 + x$ の解であるから

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

よって

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}} = a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

従って，α, β, s, t の一組として

$$(\alpha, \beta, s, t) = \boxed{\left(\mathbf{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}, \mathbf{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}, \mathbf{-\frac{1}{\sqrt{5}}}, \mathbf{\frac{1}{\sqrt{5}}}\right)}$$

が得られた

(3) (2) の結果を用いて

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_n} &= \frac{1}{5}(\beta^n - \alpha^n)^2 \\
\frac{r_n}{k^n} &= \frac{5}{k^n(\beta^n - \alpha^n)^2} \\
&= \frac{5}{(k\beta^2)^n\left\{1 - \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n\right\}^2}
\end{aligned}$$

$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| < 1$ であるから，求める条件は

$$k\alpha^2 = 1$$

$$k = \frac{1}{\alpha^2} = \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^2 = \boxed{\mathbf{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

このとき，極限値は $\boxed{\mathbf{5}}$ ……(答)

〔名古屋大学 (0043201406)〕

5. O を原点とする座標平面上に点 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円 S_0 がある．

(1) 円 S_0 に原点以外で外接し，x 軸に接する円の中心の軌跡は，方程式 $y = \boxed{\text{ア}}$ で表される曲線である．ただし，原点を除く．

(2) 点 $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を S_1 とする．このとき，2 つの円 $S_0,\ S_1$ に外接し，かつ x 軸に接する円がただ 1 つ存在する．この円を S_2 とすると，その中心の座標は $\left(\boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウ}}\right)$ である．

さらに，3 以上の自然数 n に対して，2 つの円 $S_0,\ S_{n-1}$ に外接し，かつ x 軸に接する円のうち円 S_{n-2} と異なる円がただ 1 つ存在する．この円を S_n と定める．このとき，S_3 の中心の座標は $\left(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}}\right)$ である．一般に，S_n の中心の座標 $(x_n,\ y_n)$ を n で表すと，$x_n = \boxed{\text{カ}}$, $y_n = \boxed{\text{キ}}$ となる．

特に，$\dfrac{1}{\sqrt{y_n}}$ と $\dfrac{1}{\sqrt{y_{n-1}}}$ の関係式を考えると $\dfrac{1}{\sqrt{y_n}} - \dfrac{1}{\sqrt{y_{n-1}}} = \boxed{\text{ク}}$ $(n = 2,\ 3,\ \cdots)$ と表せる．（注：$\boxed{\text{ク}}$ には，数を入れよ．）

(3) S_0 を T_0, S_1 を T_1, S_2 を T_2 で表す．3 以上の自然数 n に対し，2 つの円 $T_{n-2},\ T_{n-1}$ に外接し，かつ x 軸に接する円のうち円 T_{n-3} と異なる円がただ 1 つ存在する．これを T_n と定める．T_n の中心の x 座標を z_n とし，半径を r_n とすると

$$(z_{n-1}z_n)^2 = \boxed{\text{ケ}},\quad (z_{n-2} - z_n)^2 = \boxed{\text{コ}} \qquad (A)$$

が成り立つ．（注：$\boxed{\text{ケ}}$ は $r_{n-1},\ r_n$ を用いて，$\boxed{\text{コ}}$ は $r_{n-2},\ r_n$ を用いて表せ．）

ここで，数列 $\{w_n\}$ を $w_n = \dfrac{z_n}{\sqrt{r_n}}$ $(n = 0,\ 1,\ \cdots)$ で定める．関係式 (A) と数列 $\{z_n\}$ の大小関係に注意すると，T_n の半径 r_n に関して，漸化式

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}} = \frac{1}{\sqrt{r_{n-1}}} + \frac{1}{\sqrt{r_{n-2}}} \quad (n = 2,\ 3,\ \cdots) \qquad (B)$$

が導かれる．関係式 (A) から r_n を消去し，漸化式 (B) を適用すると，w_n は w_{n-1}, w_{n-2} を用いて $w_n = \boxed{\text{サ}}$ $(n = 2,\ 3,\ \cdots)$ と表される．さらに，数列 $\{f_n\}$ を $f_0 = 0,\ {}_1 = 1$ および漸化式 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n = 1,\ 3,\ \cdots)$ を満たす数列とすると z_n は $f_n,\ f_{n+1}$ を用いて $z_n = \boxed{\text{シ}}$ $(n = 0,\ 1,\ \cdots)$ と表される．

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
$\dfrac{1}{2}x^3$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{18}$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{1}{2n^2}$	$\sqrt{2}$	$4r_{n-1}r_n$	$4r_{n-1}r_n$	$w_{n-1} + w_{n-2}$

シ
$\dfrac{f_n}{f_{n+1}}$

〔立命館大学 (2200201722)〕

6. xy 平面において，点 $\left(0,\ \dfrac{1}{3}\right)$ を中心とし，x 軸に接する円を C_0 とする。

(1) 円 C_0 と $x>0$ の範囲で外接し，かつ x 軸にも接する円の中心の座標を $(p,\ q)$ とする。q を p で表すと $q=\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) 円 C_1 は中心の x 座標が $a_1=1$ であり，$x>0$ の範囲で C_0 に外接し，かつ x 軸に接する。また円 C_2 は中心の x 座標が a_2 であり，$C_0,\ C_1$ の両方に外接し，かつ $x>0$ の範囲で x 軸に接する。

以下, $n=3,\ 4,\ \cdots$ に対して，中心の x 座標が a_n であり，C_0 と C_{n-1} の両方に外接し，かつ x 軸に接する円を C_n とする。ただし，C_n と C_{n-2} は異なる。このとき，C_n の半径を a_n を用いて表すと $\boxed{\text{イ}}$ であり，a_n と a_{n+1} との間には

$$(a_n-a_{n+1})^2=\boxed{\text{ウ}}\,{a_{n+1}}^2{a_n}^2 \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

が成立する。したがって，a_{n+1} を a_n を用いて表すと，$a_{n+1}=\boxed{\text{エ}}$ である。このようにして定まる数列 $\{a_n\}$ において $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおく。このとき b_{n+1} を b_n を用いて表すと $b_{n+1}=\boxed{\text{オ}}$ である。したがって数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=\boxed{\text{カ}}$ である。

(3) C_n の面積を S_n とするとき，$S_n=\boxed{\text{キ}}$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^4S_n$ の値は $\boxed{\text{ク}}$ である。

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
$\dfrac{3}{4}p^2$	$\dfrac{3}{4}{a_n}^2$	$\dfrac{9}{4}$	$\dfrac{2a_n}{3a_n+2}$	$b_n+\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{2}{3n-1}$	$\dfrac{9\pi}{(3n-1)^4}$	$\dfrac{\pi}{9}$

〔東海大学 (2095201906)〕

7. 平面上に半径がそれぞれ a^2, b^2, c^2 $(0 < a < b < c)$ の3つの円 A, B, C および直線 ℓ がある。3つの円はどれも直線 ℓ に接していて，どの2つの円も外接しているとする。

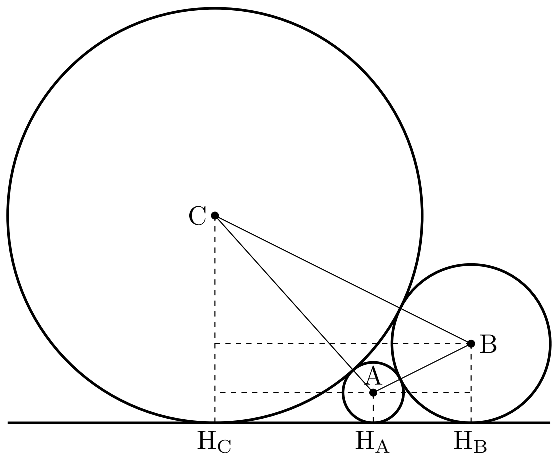
(1) c を a と b を用いて表せ。

(2) 数列 a, b, c が等比数列となるとき，その公比を求めよ。

【解答】

(1) $c = \dfrac{ab}{b-a}$

(2) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$



〔千葉大学 (0020202102)〕

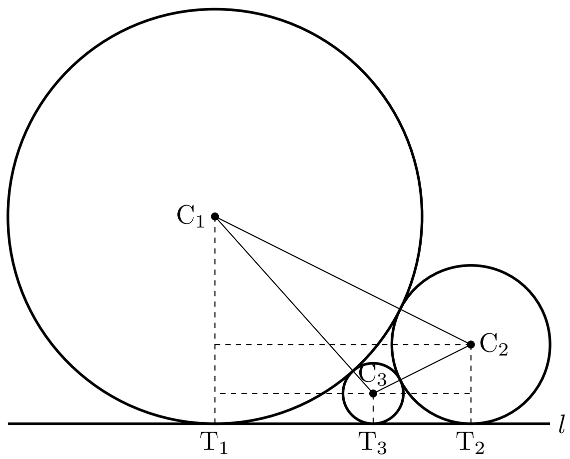
8. 共通の接線 l をもつ円 C_1, C_2, C_3 の半径をそれぞれ r_1, r_2, r_3 とする。これらの円のどの二つも互いに外接しており，C_3 は l, C_1, C_2 に囲まれた領域に含まれているものとする。以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{r_3}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_2}}$ となることを示せ。

(2) $r_3 = 1$ のとき，$r_1 + r_2$ の取り得る値の最小値を求めよ。

【解答】

(1) $\mathrm{T_1T_2} = \sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2} = 2\sqrt{r_1r_2}$
$\mathrm{T_1T_3} = \sqrt{(r_1+r_3)^2-(r_1-r_3)^2} = 2\sqrt{r_1r_3}$
$\mathrm{T_2T_3} = \sqrt{(r_2+r_3)^2-(r_2-r_3)^2} = 2\sqrt{r_2r_3}$
$\mathrm{T_1T_2} = \mathrm{T_1T_3} + \mathrm{T_2T_3}$



(2) 8

〔お茶の水女子大学 (0031202102)〕