

t を正の実数とし、平面上の 3 点 $A(7, 1)$, $B(t, 3t)$, $O(0, 0)$ を頂点とする $\triangle ABO$ の内部 (辺を含まない) に点 P がある。以下の問いに答えよ。

(1) q を正の実数とし、直線 OP と直線 AB の交点を C とする。 $\triangle OAP$ と $\triangle OBP$ の面積比が $1:q$ のとき、点 C の座標を q, t を用いて表せ。

(2) $\triangle ABO$ が鋭角三角形で、点 P が $\triangle ABO$ の垂心であるとき〔なお、三角形の各頂点から対辺またはその延長に下ろした垂線は 1 点で交わる。この交点を三角形の垂心という。〕

(i) t の範囲を求めよ。

(ii) $\triangle OAP$, $\triangle OBP$, $\triangle ABP$ の面積をそれぞれ S_1, S_2, S_3 とする。 $\frac{S_1}{S_3}$

および $\frac{S_2}{S_3}$ を t を用いて表せ。

(iii) S_3 を t の関数と考えて $S_3(t)$ とするとき、 $S_3(t)$ の最大値とそのときの t の値を求めよ。

【解答】

